II : Équations différentielles linéaires

Cette série d'exercices a pour but de vous familiariser avec les équations différentielles linéaires du premier et deuxième ordre de la forme

$$\begin{aligned} &y' + a(x)y = b(x) \quad (E_1) \\ &y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (E_2)\,, \end{aligned}$$

où les fonctions a, b et c, a priori à valeurs complexes, sont continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ces équations ont une solution unique étant donnée une condition initiale, $y(x_0)$ pour (E_1) ou $(y(x_0), y'(x_0))$ pour (E_2), dans un voisinage suffisamment petit de x_0. On notera (E_1') et (E_2') les équations homogènes (sans second membre) associées à (E_1) et (E_2).

Les exercices ou questions à faire en priorité sont dénotés avec un (*).

Exercice 1 (*)

Montrer que l'espace des solutions des équations homogènes (E_1') et (E_2') sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ est toujours un espace vectoriel et que cet espace est de dimension au plus un pour (E_1') et au plus deux pour (E_2').

Exercice 2 (*)

1) Montrer que si A est une primitive de a, la solution générale de (E_1') est $y(x) = Ce^{-A(x)}$ pour une constante C.
2) Résoudre l'équation (E_1) avec second membre en cherchant la solution sous la forme $y(x) = C(x)e^{-A(x)}$ (méthode dite de la "variation de la constante").
3) Trouver la solution générale de $xy' + y = 0$. Quel est la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $]0, +\infty[$, sur $]-\infty, 0[$, sur $\mathbb{R}$?
4) Trouver la solution générale de $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 1[$, $]0, \infty[$.

Exercice 3

1) (*) Soit y_0 une solution particulière de (E_2'). En posant $y = zy_0$, montrer que l'on peut alors obtenir la solution générale de (E_2). En déduire en particulier que si on a une solution particulière de (E_2') qui ne s'annule pas sur un intervalle $J \subset I$, alors l'espace vectoriel des solutions de (E_2') sur J est de dimension deux.
2) Trouver la solution générale de $x(x+2)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$ sur $]-\infty, -2[$, $]-2, 0[$ et $]0, +\infty[$. Peut-on trouver des solutions sur $]-\infty, 0[$, sur $]-2, +\infty[$, sur $\mathbb{R}$?
3) Trouver la solution générale de $x(1-x)y''+(2x^2-1)y'+2(1-2x)y = 1-2x-x^2$ sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 1[$, $]0, +\infty[$, $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1) (*) Résoudre l'équation (E_2') sur $\mathbb{R}$ dans le cas où a et b sont des constantes (a priori complexes). On distinguera les cas $a^2 \neq 4b$ et $a^2 = 4b$.
2) (*) Soit $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique à coefficients constants et $B = (B_i(x))_{1\leq i\leq n}$ un vecteur. On considère les systèmes d'équations linéaires couplées

$$\begin{aligned} y_i' &= A_{ij}y_j + B_i(x) \quad (S_1) \\ y_i'' + A_{ij}y_j &= B_i(x) \quad (S_2)\,. \end{aligned}$$

   a) Montrer que (S_1) et (S_2) peuvent s'écrire sous forme matricielle.
   b) Expliquer comment obtenir la solution générale de (S_1) et (S_2).
3) Trouver la solution générale sur $\mathbb{R}$ de $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + x^2 - 1$.
4) (*) Quelle est la signification physique de l'équation $m\ddot{x} + \zeta\dot{x} + kx = 0$, où les constantes m, ζ et k sont toutes positives ? Discuter la forme générale de la solution. Quelle est la signification physique de l'équation $m\ddot{x}+\zeta\dot{x}+kx = F(t)$? Indiquer brièvement comment la solution générale de cette équation peut être obtenue (on ne demande pas d'effectuer le calcul explicite).

Exercice 5 Trouver la solution générale de l'équation d'Euler $x^2y''+\alpha xy'+\beta y = 0$, où α et β sont des constantes (a priori complexes), sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$. On distinguera les cas $\beta \neq \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2$ et $\beta = \frac{1}{4}(\alpha - 1)^2$.